

doi:10.3969/j.issn.1007-7162.2013.03.018

关于交叉立方体中一类保维自同构群的讨论

郑健微,殷超杰

(广东工业大学 应用数学学院,广东 广州 510006)

摘要: 交叉立方体的圈、路嵌入与容错问题是研究的热点. 为进一步研究交叉立方体,本文构造了一类保维自同构并证明了在合成运算下这些保维自同构构成群.

关键词: 交叉立方体;超立方体;互联网络;保维自同构;保维自同构群

中图分类号: O177.91

文献标志码: A

文章编号: 1007-7162(2013)03-0095-06

A Kind of Dimension Preserving Automorphism Group of the Crossed Cube

Zheng Jian-wei, Yin Chao-jie

(School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China)

Abstract: The embedding of paths or cycles in the crossed cube has been attracting much research interest, and the fault-tolerance of the crossed cube has been a major concern of relevant studies as well. In order to study the crossed cube further, it constructs a kind of dimension preserving automorphism, and proves that it can be a group with synthetic operation.

Key words: crossed cube; Hypercube; interconnection networks; dimension preserving automorphism; dimension preserving automorphism group

作为拓扑结构,互联网网络在平行处理与计算系统中发挥了巨大的作用,尤其是在多计算机系统中,它为处理器之间数据的交换提供了有效的机制. n 维超立方体(hypercube) Q_n 是一种最为广泛应用的互联网络,它具有许多优良的性质,如递归性、对称性、正规性等. 但超立方体 Q_n 也有它固有的缺点,如直径较大. 为了克服超立方体的缺点,人们提出了许多变形网络,如交叉立方体^[1-11] (crossed cube)、Möbius 立方体^[12-13]、增广立方体^[14] (augmented cube)、局部扭立方体^[15] (locally twisted cube) 等,这些超立方体的变形网络的直径只有超立方体网络的一半.

一般互联网网络可用无向的连通图 $G=(V,E)$ 来表示, $V=V(G)$ 为节点集, $E=E(G)$ 为 G 的边集,其中节点代表处理器,边代表处理器之间的物理连线. 图 $G=(V_G,E_G)$ 到 $H=(V_H,E_H)$ 的映射是将节点 V_G 映射到节点 V_H . 在这里可以形象地认为图 G 为

客图(guest graph), H 为主图(host graph).

本文讨论的为交叉立方体网络,记为 CQ_n ,它与 Q_n 一样有许多的优良性质,即它们有一样的顶点数 2^n ,一样的边数 $2^{n-1}n$,一样的正则度 n ,一样的连通度 n ,且有简单的递归结构. 它也有超立方体所没有的性质,如 CQ_n 的直径为 $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$,它只有 Q_n 直径的一半^[1];一棵具有 $2n-1$ 个顶点的完全二叉树能以膨胀数 1 嵌入到交叉立方体 CQ_n 中,而同样的树却只能以膨胀数 2 嵌入到超立方体 Q_n 中^[3];长度为 $4 \sim 2^n$ 的泛圈都能以膨胀数(dilation) 1 嵌入到 CQ_n 中,而只有偶长圈才能以同样的膨胀数嵌入到 Q_n 中^[6]. 其中,膨胀数是刻画嵌入优劣的一个重要参数,它表示客图 G 到主图 H 的嵌入 ψ 中, G 的边被“拉长”的最大长度;在平行处理中,它是度量当主图 H 按 ψ 模拟 G 时,通信延滞的重要参数.

在设计一个互联网网络时有较多的复杂要求,

人们几乎不可能设计一个面面俱到的网络,但可以依据网络中需要的性质与要求来设计一个合适的网络,而设计和评价一个网络优劣的核心问题是图的嵌入问题. 同构映射对研究图的嵌入和容错性问题有着重要的意义^[7,12-13]. 本文构造了交叉立方体中一类有趣的保维自同构群,为进一步研究交叉立方体的嵌入和容错问题打下了良好的基础.

1 预备知识

n 维交叉立方体 CQ_n 有 2^n 个节点, CQ_n 中的每个节点可用长为 n 的二元序列向量表示: $u = u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_1u_0$, 此时也称之为节点 u 的位址, 其中 u_{n-1} 为首位, u_0 为末位. u 的第 i 个比特位用 u_i 表示, 其中, $u_i \in \{0, 1\}$, i 为整数, $0 \leq i \leq n-1$. u_i 的补用 $\bar{u}_i$ 表示 ($\bar{0} = 1, \bar{1} = 0$). 从一个节点 u^1 到另外一个节点 u^2 的边用 (u^1, u^2) 表示, 其中 u^1, u^2 分别为边 (u^1, u^2) 的两端点. 在 CQ_n 中, 两端点是否相连是由它们的位址比特位决定的, 由此, 有以下定义.

定义 1^[1] 两个二元序列 $x = x_1x_0, y = y_1y_0$ 称为相关对, 记为 $x \sim y$, 当且仅当 $(x, y) \in \{(00, 00), (10, 10), (01, 11), (11, 01)\}$.

n 维交叉立方体 CQ_n 可以用递归定义表示, $n \geq 2$ 时, CQ_n 是由两个 $n-1$ 的交叉立方体 CQ_{n-1} (分别记为 CQ_{n-1}^1 和 CQ_{n-1}^0) 用 2^{n-1} 条边连接起来, 其中 CQ^0, CQ^1 分别是节点标号分别为 0 和 1 的完全图. CQ_{n-1}^0 的节点 $u = 0u_{n-2}u_{n-1}\cdots u_0$ 和 CQ_{n-1}^1 中的节点 $v = 1v_{n-2}v_{n-1}\cdots v_0$ 在 CQ_n 中相邻, 当且仅当

- 1) $u_{n-2} = v_{n-2}$, 如果 n 是偶数;
- 2) $(u_{2i+1}u_{2i}, v_{2i+1}v_{2i}) \in \{(00, 00), (10, 10), (01, 11), (11, 01)\}$, 当 $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 时.

定义 2^[2] 交叉立方体 CQ_n 的顶点集为 $\{v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0 \mid v_i \in \{0, 1\}, 0 \leq i \leq n-1\}$, 两个节点 $u = u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v = v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0$ 相邻, 当且仅当存在 $0 \leq d \leq n-1$, 且满足下面 4 个条件:

- 1) $u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_{d+1} = v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_{d+1}$;
- 2) $u_d \neq v_d$;
- 3) $u_{d-1} = v_{d-1}$, 如果是奇数;
- 4) $u_{2i+1}u_{2i} \sim v_{2i+1}v_{2i}$, 当 $0 \leq i \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ 时.

CQ_n 中的每个顶点都关联着 n 条边, 分别表示为第 $0, 1, 2, \cdots, n-1$ 维边. 例如, 图 1 中 CQ_4 中的一个顶点 $u = 0100$, 那么 u 的第 $0, 1, 2, 3$ 维的关联系点

分别是 $0101, 0110, 0000, 1100$.

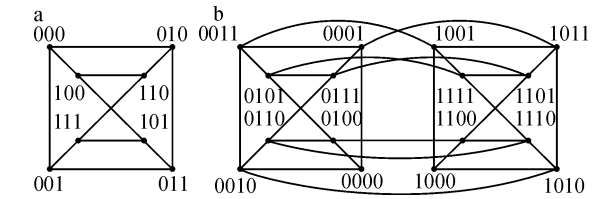


图 1 三维交叉立方体 CQ_3 与四维交叉立方体 CQ_4
Fig. 1 The 3-dimensional crossed cube CQ_3 and the 4-dimensional crossed cube CQ_4

定义 3^[3] CQ_n 的保维自同构 ψ 是 $V(CQ_n)$ 上的一个置换, 对任意的 $x, y \in V(CQ_n)$, (x, y) 是 CQ_n 中的一个 d 维边当且仅当 $(\psi(x), \psi(y))$ 也是 CQ_n 中的一个 d 维边, 其中 $d = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

2 交叉立方体中的保维自同构群

为了更好地证明后面得到的定理, 下面完整地列出文献[3]与文献[4]的两个引理及其证明.

引理 1^[3] 对任意的节点 $u = u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_1u_0 \in V(CQ_n)$, 存在映射: $\psi_{n-1}: V(CQ_n) \rightarrow V(CQ_n)$, 使得 $\psi_{n-1}(u) = \bar{u}_{n-1}u_{n-2}\cdots u_1u_0$. 则 ψ_{n-1} 为 CQ_n 的保维自同构.

证明 令 (u^1, u^2) 为 CQ_n 中任意的 d 维边, $\psi_{n-1}(u^1) = v^1, \psi_{n-1}(u^2) = v^2$. 由于 (u^1, u^2) 是 d 维边, 则 (u^1, u^2) 满足下面 4 个条件:

- $u_{n-1}^1u_{n-2}^1\cdots u_{d+1}^1 = u_{n-1}^2u_{n-2}^2\cdots u_{d+1}^2$;
- $u_d^1 \neq u_d^2$;
- $u_{d-1}^1 = u_{d-1}^2$, 当 d 为奇数时;
- $u_{2i+1}^1u_{2i}^1 \sim u_{2i+1}^2u_{2i}^2$, 当 $0 \leq i \leq \lfloor \frac{d-2}{2} \rfloor$ 时.

下面分两种情况证明 (v^1, v^2) 为 d 维边.

- 1) $d = n-1$ 时, (u^1, u^2) 为 $n-1$ 维边. 不妨令 $u^1 = 0u_{n-2}^1\cdots u_1^1u_0^1, u^2 = 1u_{n-2}^2\cdots u_1^2u_0^2$.

将上面条件中的 d 用 $n-1$ 代替后如下:

$u_{n-1}^1 \neq u_{n-1}^2$;

$u_{n-2}^1 = u_{n-2}^2$, 当 $n-1$ 为奇数时;

$u_{2i+1}^1u_{2i}^1 \sim u_{2i+1}^2u_{2i}^2$, 当 $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$ 时.

由于

$v^1 = \psi_{n-1}(u^1) = 1u_{n-2}^1\cdots u_1^1u_0^1, v^2 = \psi_{n-1}(u^2) = 0u_{n-2}^2\cdots u_1^2u_0^2,$

显然当 (u^1, u^2) 满足上面 3 个条件时, (v^1, v^2) 也满足. 则 (v^1, v^2) 为 $n-1$ 维边. 由于 ψ 存在一个逆映

射,则同理可证当 (v^1, v^2) 为 $n-1$ 维边时,经过逆映射 ψ^{-1} 后的边 (u^1, u^2) 也为 $n-1$ 维.

2) $d < n-1$ 时, (u^1, u^2) 为 d 维边.

不妨令 $u^1 = 0u_{n-2}^1 \cdots u_{d+1}^1 u_d^1 \cdots u_1^1 u_0^1$, $u^2 = 0u_{n-2}^2 \cdots u_{d+1}^2 u_d^2 \cdots u_1^2 u_0^2$. d 维边 (u^1, u^2) 满足

$$u_j^1 = u_j^2, \text{ 当 } d+1 \leq j \leq n-1;$$

$$u_d^1 \neq u_d^2;$$

$$u_{d-1}^1 = u_{d-1}^2, \text{ 当 } d \text{ 为奇数时};$$

$$u_{2i+1}^1 u_{2i}^1 \sim u_{2i+1}^2 u_{2i}^2, \text{ 当 } 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{d-2}{2} \right\rfloor \text{ 时}.$$

此时, $v^1 = \psi_{n-1}(u^1) = 1u_{n-2}^1 \cdots u_{d+1}^1 u_d^1 \cdots u_1^1 u_0^1$, $v^2 = \psi_{n-1}(u^2) = 1u_{n-2}^2 \cdots u_{d+1}^2 u_d^2 \cdots u_1^2 u_0^2$.

显然 (v^1, v^2) 满足上面4个条件. 则 (v^1, v^2) 为 d 维边. 反过来也可证得当 (v^1, v^2) 为 d 维边时, $(\psi^{-1}(v^1), \psi^{-1}(v^2))$ 为 d 维边. 而 $\psi_{n-1}: V(CQ_n) \rightarrow V(CQ_n)$, 所以 ψ_{n-1} 为 CQ_n 的保维自同构.

引理 2^[4] 对于任意的节点 $u = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_1u_0 \in V(CQ_n)$, 存在映射 $\psi_i: V(CQ_n) \rightarrow V(CQ_n)$, 使得 $\psi_i(u) = u_{n-1}u_{n-2} \cdots \overline{u_{2k+1}}u_{2k} \cdots u_1u_0$, 其中奇数 $i = 2k+1$, $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. 则 ψ_i 为 CQ_n 的保维自同构.

证明 由于 (u^1, u^2) 为 d 维边, 不妨令 $u^1 = u_{n-1}^1 u_{n-2}^1 \cdots u_{d+1}^1 u_d^1 \cdots u_1^1 u_0^1$, $u^2 = u_{n-1}^2 u_{n-2}^2 \cdots u_{d+1}^2 u_d^2 \cdots u_1^2 u_0^2$. 下分两种情形证明 (v^1, v^2) 是 d 维边.

1) $d = 2k+1$ 时, $k = 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

(1) 当 k 取 $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, 即为引理 1 构造的映射 ψ_{n-1} . 它为 CQ_n 的保维自同构映射.

(2) 当 $2k+1 \neq n-1$ 时. 此时 (u^1, u^2) 为 $2k+1$ 维边, $k = 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} - 1 \right\rfloor$. 它满足下面3个条件:

$$u_{n-1}^1 u_{n-2}^1 \cdots u_{2k+2}^1 = u_{n-1}^2 u_{n-2}^2 \cdots u_{2k+2}^2,$$

$$u_{2k+1}^1 \neq u_{2k+1}^2,$$

$$u_{2i+1}^1 u_{2i}^1 \sim u_{2i+1}^2 u_{2i}^2, \text{ 当 } 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{2k-1}{2} \right\rfloor \text{ 时},$$

并且有以下等式:

$$\psi_i(u^1) = u_{n-1}^1 u_{n-2}^1 \cdots \overline{u_{2k+1}^1} u_{2k}^1 \cdots u_1^1 u_0^1 = u_{n-1}^1 u_{n-2}^1 \cdots u_{2k+1}^2 u_{2k}^2 \cdots u_1^2 u_0^2,$$

$$\psi_i(u^2) = u_{n-1}^2 u_{n-2}^2 \cdots \overline{u_{2k+1}^2} u_{2k}^2 \cdots u_1^2 u_0^2 = u_{n-1}^1 u_{n-2}^1 \cdots u_{2k+1}^1 u_{2k}^1 \cdots u_1^1 u_0^1,$$

显然, $(\psi_i(u^1), \psi_i(u^2))$ 只是将 (u^1, u^2) 的比特位 u_{2k+1}^1, u_{2k+1}^2 调换过来, 则 $(\psi_i(u^1), \psi_i(u^2))$ 仍满足上

面3个条件. 令 $v^1 = \psi_i(u^1)$, $v^2 = \psi_i(u^2)$, 则 (v^1, v^2) 为 $2k+1$ 维边. 反过来可以证明当 (v^1, v^2) 为 $2k+1$ 维边, (u^1, u^2) 也为 $2k+1$ 维边.

2) $d \neq 2k+1$ 时. 不妨令 $d > 2k+1$.

设 $u = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_{d+1}u_d \cdots u_{2k+1}u_{2k} \cdots u_1u_0$. (u^1, u^2) 为 d 维边, 则当 $u_{2k+1}^1 u_{2k}^1$ 取 00, 01, 10, 11 时, 对应地, $u_{2k+1}^2 u_{2k}^2$ 取 00, 11, 10, 01. 由映射 $\psi_i(u) = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_{2k+1}u_{2k} \cdots u_1u_0$ 可知, ψ_i 同时改变了 $u^1 u^2$ 的第 $2k+1$ 个比特位. 当 $u_{2k+1}^1 u_{2k}^1$ 取 10, 11, 00, 01 时, 相应地, $u_{2k+1}^2 u_{2k}^2$ 取 10, 01, 00, 11. 显然, 由关联对定义可知 $u_{2k+1}^1 u_{2k}^1 \sim u_{2k+1}^2 u_{2k}^2$. 则 (v^1, v^2) 为 d 维边. 反过来可以证明当 (v^1, v^2) 为 d 维边时, $(\psi^{-1}(v^1), \psi^{-1}(v^2))$ 也为 d 维边. 且因为 $\psi_i: V(CQ_n) \rightarrow V(CQ_n)$, 所以 ψ_i 为 CQ_n 的保维自同构.

基于上面的引理, 对于任意的节点

$$u = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_i u_{i-1} \cdots u_j u_{j-1} \cdots u_1 u_0,$$

构造映射

$$\psi_{i,j}(u) = u_{n-1}u_{n-2} \cdots \overline{u_i} u_{i-1} \cdots \overline{u_j} u_{j-1} \cdots u_1 u_0,$$

其中 $i = 2k+1$ 或 $n-1$; $j = 2l+1$ 或 $n-1$, 且 $0 \leq k, l \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

记 CQ_n 中所有保维自同构构成的集合为 X , 取集合 X 中的元素 ψ_i, ψ_j , 对任意的节点 $u \in CQ_n$, 定义非空集合 X 上的合成运算 $\circ$ 为

$$(\psi_i \circ \psi_j)(u) = \psi_i[\psi_j(u)] = \psi_{i,j}(u).$$

令 $u = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_i u_{i-1} \cdots u_j u_{j-1} \cdots u_1 u_0$. 当 $i = j$ 时, $(\psi_i \circ \psi_j)(u) = \psi_{i,i}(u)$, $\psi_{i,i}(u) = \psi_i[\psi_i(u)] = \psi_i(u_{n-1}u_{n-2} \cdots \overline{u_i} u_{i-1} \cdots u_1 u_0) = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_i u_{i-1} \cdots u_1 u_0$, 即 $\psi_{i,j}$ 为一个恒等映射, 从而可见 $\psi_i^{-1} = \psi_i$. 习惯上, 用符号 ε 来表示恒等映射, 即 $\psi_{i,i} = \varepsilon$.

当 $i \neq j$ 时, 不妨令 $i > j$, $(\psi_i \circ \psi_j)(u) = \psi_i[\psi_j(u)]$, $(\psi_j \circ \psi_i)(u) = \psi_j[\psi_i(u)]$,

$$\psi_i[\psi_j(u)] = \psi_i(u_{n-1}u_{n-2} \cdots \overline{u_i} u_{i-1} \cdots \overline{u_j} u_{j-1} \cdots u_1 u_0) = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_i u_{i-1} \cdots \overline{u_j} u_{j-1} \cdots u_1 u_0,$$

$$\psi_j(\psi_i(u)) = \psi_j(u_{n-1}u_{n-2} \cdots \overline{u_i} u_{i-1} \cdots u_j u_{j-1} \cdots u_1 u_0) = u_{n-1}u_{n-2} \cdots \overline{u_i} u_{i-1} \cdots u_j u_{j-1} \cdots u_1 u_0.$$

所以, 对任意的节点 $u \in CQ_n$, 集合 X 中的元素 ψ_i, ψ_j 满足 $(\psi_i \circ \psi_j)(u) = (\psi_j \circ \psi_i)(u)$.

由上面构造的映射 $\psi_{i,j}$, 有下面的定理.

定理 1 $\psi_{i,j}$ 为 CQ_n 上的保维自同构, 其中 $i = 2k+1$ 或 $n-1$; $j = 2l+1$ 或 $n-1$, 且 $0 \leq k, l \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

证明 将问题分成 $i=j$ 和 $i \neq j$ 两种情况.

(1) 当 $i=j$ 时, 有 $\psi_{i,i}(u) = \psi_i(\psi_i(u)) = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_i u_{i-1} \cdots u_1 u_0 = \varepsilon(u)$, 即 $\psi_{i,i}$ 为恒等映射. 令 $v = \psi_{i,i}(u)$. 显然, (u^1, u^2) 与 (v^1, v^2) 为 CQ_n 中的同一条边, 若 (u^1, u^2) 为 d 维边, 则 (v^1, v^2) 也为 d 维边. 反之亦成立.

(2) 当 $i \neq j$ 时, 不妨设 CQ_n 中的一条 d 维边为 (u^1, u^2) , 令 $v^1 = \psi_j(u^1), v^2 = \psi_j(u^2)$, 等式

$$\psi_{i,j}(u^1, u^2) = \psi_i[\psi_j(u^1, u^2)] = \psi_i[\psi_j(u^1), \psi_j(u^2)] = \psi_i(v^1, v^2) = (\psi_i(v^1), \psi_i(v^2)) \text{ 成立.}$$

可知, d 维边 $\psi_{i,j}(u^1, u^2)$ 与 $(\psi_i(v^1), \psi_i(v^2))$ 是等价的, 而由引理 1、2 知当 (u^1, u^2) 为 d 维边时, 经过保维自同构 ψ_j 映射后 (v^1, v^2) 为 d 维边, d 维边 (v^1, v^2) 经过保维自同构 ψ_i 映射后 $(\psi_i(v^1), \psi_i(v^2))$ 也为 d 维边. 由此, 可证得当 (u^1, u^2) 为 CQ_n 中的 d 维边时, $(\psi_{i,j}(u^1), \psi_{i,j}(u^2))$ 也为 CQ_n 中的 d 维边, 且存在 $\psi_{i,j}^{-1} = \psi_{i,j}$, 使得当 $(\psi_{i,j}(u^1), \psi_{i,j}(u^2))$ 为 d 维边时, 经过映射 $\psi_{i,j}^{-1}$ 后得到的 (u^1, u^2) 也为 d 维边, 其中 $\psi_{i,j}: V(CQ_n) \rightarrow V(CQ_n)$, 所以 $\psi_{i,j}$ 为 CQ_n 上的保维自同构. 证毕.

将上面构造的映射进行推广, 不断改变 u 的任意 3 个、4 个比特位 (这些比特位只能是奇数位或首位) $\cdots$ 构造映射 $\psi_{2k+1, 2l+1, 2m+1} \cdots \psi_{1, 3, \dots, 2k+1 \cdots n-1}$. 易证明这些映射都为保维自同构. 其中 k, l, m 取 0, 1, $2 \cdots \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 中任意一个值.

已知 $\varepsilon(u) = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_{2i+1}u_{2i} \cdots u_{2j+1}u_{2j} \cdots u_1u_0$ 为保维自同构. 显然, ε 不对任何比特位取补, ε 只有 1 个. 引理 1、2 构造的保维自同构为 ψ_i, ψ_{n-1} , 其中 $\psi_i(u) = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_{2k+1}u_{2k} \cdots u_1u_0, \psi_{n-1}(u) = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_{2k+1}u_{2k} \cdots u_1u_0$. 显然, 它们都只取一个比特位的补集, 共有 $C_{n/2}^1 = C_{\lceil n/2 \rceil}^1 = \lceil n/2 \rceil$ 个. 当取任意两个奇数或首位比特位的补集时, 即定理 1 构造保维自同构, 共有 $C_{\lceil n/2 \rceil}^2$ 个. 依此类推, 当取任意 3 个、4 个、 $\cdots \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 个奇数比特位的补集时, 构造的保维

自同构映射分别有 $C_{\lceil n/2 \rceil}^3$ 个, $C_{\lceil n/2 \rceil}^4$ 个, $\cdots, C_{\lceil n/2 \rceil}^{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个. 特别的, 由于 CQ_n 中的 n 可取奇数或者偶数, 则最后构造的映射 $\psi_{1,3,5,\dots,n-1}$ 会因 n 取值的不同而有所区别. 当 n 为偶数时, 保维自同构为 $\psi_{1,3,5,\dots,n-3,n-1}(u) = u_{n-1}u_{n-2}u_{n-3} \cdots u_3u_2u_1u_0$; 当 n 为奇数时, 保维自同构为 $\psi_{1,3,5,\dots,n-2,n-1}(u) = u_{n-1}u_{n-2}u_{n-3} \cdots u_3u_2u_1u_0$.

综上所述可得, 无论当 CQ_n 中的 n 取奇数还是偶

数, 构造的保维自同构的个数共有 $C_{\lceil n/2 \rceil}^0 + C_{\lceil n/2 \rceil}^1 + C_{\lceil n/2 \rceil}^2 + \cdots + C_{\lceil n/2 \rceil}^{\lfloor n/2 \rfloor} = 2^{\lceil n/2 \rceil}$ 个.

设非空集合 X 与 X 上的合成运算 $\circ$ 构成的代数结构为 $\Gamma = (X, \circ)$. 本文有以下定理:

定理 2 集合 X 上的所有保维自同构在合成运算 $\circ$ 下构成 CQ_n 中的一个 $2^{\lceil n/2 \rceil}$ 阶的保维自同构群, 并记为 $\text{Aut}(CQ_n)$.

证明 设 ψ, φ 为 X 中的任意两个保维自同构, 节点 $u = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_{2i+1}u_{2i} \cdots u_1u_0$ 对任意的 $\psi, \varphi \in \text{Aut}(CQ_n), u \in V(CQ_n)$, 简记 $\varphi \circ \psi(u) = \varphi[\psi(u)]$.

(1) 由集合 X 中元素的构造方法易知封闭性和结合律是显然的.

(2) 对 X 中的任意元素 ψ , 在保维自同构集合 X 中存在恒等映射 $\varepsilon(u) = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_1u_0$, 且 ε 满足 $\psi \circ \varepsilon(u) = \psi[\varepsilon(u)] = \psi(u), \varepsilon \circ \psi(u) = \varepsilon[\psi(u)] = \psi(u)$, 即 $\psi[\varepsilon(u)] = \varepsilon[\psi(u)] = \psi(u)$. 则恒等映射 ε 为单位元.

(3) 下面证明对任意的 $\psi \in X$, 总存在一个 φ , 使得 $\varphi \circ \psi(u) = \varphi(\psi(u)) = \varepsilon(u)$.

由上面保维自同构集合中元素的构造, 可知当取任意 1 个、2 个、3 个 $\cdots$ 比特位的补集时 (这些比特位只能是奇数或首位), 保维自同构为

$$\psi_i(u) = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_{2k+1}u_{2k} \cdots u_1u_0, \psi_{i,j}(u) = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_{2k+1}u_{2k} \cdots u_{2l+1}u_{2l} \cdots u_1u_0 \cdots \psi_{1,3,\dots,i \cdots n-1}(u) = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_{2k+1}u_{2k} \cdots u_1u_0. \text{ 其中 } k, l \text{ 取 } 0, 1, \dots, n-3, n-2, n-1.$$

分别取 $\varphi = \psi_i, \varphi = \psi_{i,j}, \cdots, \varphi = \psi_{1,3,5,\dots,n-1}$, 则有等式

$$\begin{aligned} \psi_i \circ \psi_i(u) &= \psi_i[\psi_i(u)] = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_{2k+1}u_{2k} \cdots u_1u_0 = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_{2k+1}u_{2k} \cdots u_1u_0 = \varepsilon(u), \\ \psi_{i,j} \circ \psi_{i,j}(u) &= \psi_{i,j}[\psi_{i,j}(u)] = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_{2k+1}u_{2k} \cdots u_{2l+1}u_{2l} \cdots u_1u_0 = \varepsilon(u), \\ \psi_{1,3,5,\dots,n-1}[\psi_{1,3,5,\dots,n-1}(u)] &= u_{n-1} \cdots u_3u_2u_1u_0 = \varepsilon(u). \end{aligned}$$

综上, 对 X 中的任意元素 ψ , 存在一个逆元, 且逆元就是它本身.

下面分别举例子说明当 n 取 2、3、4 时, 集合 X 上的所有保维自同构在合成运算下构成 $\text{Aut}(CQ_2), \text{Aut}(CQ_3), \text{Aut}(CQ_4)$, 且 $\text{Aut}(CQ_2)$ 同构于 2 阶的初等阿贝尔群 (Abelian group), $\text{Aut}(CQ_2)$ 和 $\text{Aut}(CQ_4)$ 同构于 4 阶的初等阿贝尔群.

初等阿贝尔群 Z_2 中只有两个元素: 0 和 1, 其中 0 为单位元, 1 的逆元为其本身. 当 CQ_n 中的 n 取 2

时,集合 X 中存在两个元素 ε, ψ_1 , 封闭性和结合律显然. 对任意的节点 $u = u_1 u_0 \in CQ_2$, 满足 $(\varepsilon \circ \psi_1)(u) = \psi_1(u)$, 则 ε 为单位元, 且 $\psi_1 = \psi_1^{-1}$, 即 ψ_1 的逆元为其本身. 则 $\text{Aut}(CQ_2) \simeq Z_2$.

两个初等阿贝尔群 Z_2 的直积: $Z_2 \times Z_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, 其中 $(0, 0)$ 为单位元, $(0, 1), (1, 0), (1, 1)$ 的逆元为其本身. 当 n 取 3 时, 集合 X 中存在 4 个元素: $\varepsilon, \psi_1, \psi_2, \psi_{1,2}$, 其中 ε 为恒等映射. 对任意的 $u = u_2 u_1 u_0 \in CQ_3$, 满足 $(\varepsilon \circ \psi_1)(u) = \psi_1(u)$, $(\varepsilon \circ \psi_2)(u) = \psi_2(u)$, $(\varepsilon \circ \psi_{1,2})(u) = \psi_{1,2}(u)$. 则 ε 为单位元, 且 $\psi_1 = \psi_1^{-1}, \psi_2 = \psi_2^{-1}, \psi_{1,2} = \psi_{1,2}^{-1}$. 下证集合 X 中的元素满足封闭性和结合律.

从集合 X 中的任取两个元素, 下面 3 个等式均成立:

$$(\psi_1 \circ \psi_2)(u) = \psi_{1,2}(u),$$

$$(\psi_1 \circ \psi_{1,2})(u) = [\psi_1 \circ (\psi_1 \circ \psi_2)](u) = [(\psi_1 \circ \psi_1) \circ \psi_2](u) = \psi_2(u),$$

$$(\psi_2 \circ \psi_{1,2})(u) = \psi_1(u),$$

由此可知集合 X 中的任意两个元素在合成运算。下等于第 3 个. 封闭性得证.

从集合 X 中任取 3 个元素, 不失一般性, 取 $\psi_1, \psi_2, \psi_{1,2}$ 或 $\varepsilon, \psi_1, \psi_2$, 有

$$[(\psi_2 \circ \psi_1) \circ \psi_{1,2}](u) = [\psi_{1,2} \circ \psi_{1,2}](u) = \varepsilon(u),$$

$$[\psi_2 \circ (\psi_1 \circ \psi_{1,2})](u) = [\psi_2 \circ \psi_2](u) = \varepsilon(u),$$

$$[(\psi_2 \circ \psi_1) \circ \varepsilon](u) = [\psi_{1,2} \circ \varepsilon](u) = \psi_{1,2}(u),$$

$$[\psi_2 \circ (\psi_1 \circ \varepsilon)](u) = [\psi_2 \circ \psi_1](u) = \psi_{1,2}(u).$$

可得

$$[(\psi_2 \circ \psi_1) \circ \psi_{1,2}](u) = [\psi_2 \circ (\psi_1 \circ \psi_{1,2})](u),$$

$$[(\psi_2 \circ \psi_1) \circ \varepsilon](u) = [\psi_2 \circ (\psi_1 \circ \varepsilon)](u).$$

所以合成运算。满足结合律.

由上述证明知当 n 取 3 时, 集合 X 上的所有保维自同构在合成运算下构成 $\text{Aut}(CQ_3)$, 且集合 X 中存在 4 个元素: $\varepsilon, \psi_1, \psi_2, \psi_{1,2}$, 其中 ε 为单位元, $\psi_1, \psi_2, \psi_{1,2}$ 的逆元为其本身. 则 $\text{Aut}(CQ_3) \simeq Z_2 \times Z_2$.

当 n 取 4 时, CQ_4 的保维自同构集合 X 中存在 4 个元素: $\varepsilon, \psi_1, \psi_3, \psi_{1,3}$. 易知 ε 为单位元, 合成运算。满足结合律, 且 $\psi_1^{-1} = \psi_1, \psi_3^{-1} = \psi_3, \psi_{1,3}^{-1} = \psi_{1,3}$. 任取集合 X 中的 3 个元素. 例如, 取 $\psi_1, \psi_3, \psi_{1,3}$, 对任意的节点 $u = u_3 u_2 u_1 u_0 \in CQ_4$, 有

$$(\psi_1 \circ \psi_3)(u) = \psi_{1,3}(u),$$

$$(\psi_1 \circ \psi_{1,3})(u) = [\psi_1 \circ (\psi_1 \circ \psi_3)](u) = [(\psi_1 \circ \psi_1) \circ \psi_3](u) = \psi_3(u),$$

$$(\psi_3 \circ \psi_{1,3})(u) = [\psi_3 \circ (\psi_1 \circ \psi_3)](u) = [\psi_3 \circ$$

$(\psi_3 \circ \psi_1)](u) = [(\psi_3 \circ \psi_3) \circ \psi_1](u) = \psi_1(u)$, 由此可知: $\psi_1, \psi_3, \psi_{1,3}$ 中任意两个元素在合成运算。下等于第 3 个. 同理可证 $\psi_1, \psi_3, \psi_{1,3}, \varepsilon, \psi_3, \psi_{1,3}, \varepsilon, \psi_1, \psi_3, \varepsilon, \psi_1, \psi_{1,3}$ 时的情形. 封闭性得证. 则当 n 取 4 时, 集合 X 上的所有保维自同构在合成运算下构成 $\text{Aut}(CQ_4)$, 且 $\text{Aut}(CQ_4) \simeq Z_2 \times Z_2$.

当 n 取 5, 6, $\dots, 2k, 2k+1$ 时, 易证得

$$\text{Aut}(CQ_5) \simeq Z_2 \times Z_2 \times Z_2 = Z_2^3 = Z_2^{\lceil 5/2 \rceil},$$

$$\text{Aut}(CQ_6) \simeq Z_2^{\lceil 6/2 \rceil},$$

$$\text{Aut}(CQ_7) \simeq Z_2^{\lceil 7/2 \rceil} = Z_2^4,$$

$$\text{Aut}(CQ_8) \simeq Z_2^{\lceil 8/2 \rceil} = Z_2^4, \dots;$$

$$\text{Aut}(CQ_{2k}) \simeq Z_2^{\lceil 2k/2 \rceil} = Z_2^k,$$

$$\text{Aut}(CQ_{2k+1}) \simeq Z_2^{\lceil 2k+1/2 \rceil} = Z_2^{k+1},$$

$$\text{Aut}(CQ_{2k+2}) \simeq Z_2^{\lceil (2k+2)/2 \rceil} = Z_2^{k+1}, k=0, 1, 2, \dots.$$

3 结论

本文构造了 $2^{\lceil n/2 \rceil}$ 个保维自同构, 这些保维自同构构成的集合 X 在合成运算。下是一个同构于阿贝尔群的保维自同构群.

参考文献:

- [1] Efe K. A variation on the Hypercube with lower diameter [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 1991, 40(11): 1312-1316.
- [2] Efe K. The crossed cube architecture for parallel computation [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 1992, 3(5): 513-524.
- [3] Kulasinghe P, Bettayeb S. Embedding binary trees into crossed cubes [J]. IEEE Transactions on Computers, 1995, 44(7): 923-929.
- [4] Baolei C, Fan J, Jiwen Y, et al. An algorithm to construct independent spanning trees on crossed cubes [EB/OL]. (2010-10-04). <http://ieeexplore.ieee.org/search/searchresult.jsp?Newsearch=true&queryText=An+algorithm+to+construct+independent+spanning+trees+on+crossed+cubes&x=39&y=17>.
- [5] Yang M C, Li T K, Tan J J M, et al. Fault-tolerant cycle-embedding of crossed cube [J]. Information Processing letters 2003, 88(4): 149-154.
- [6] Fan J, Jian X, Lin X. Node-pancyclicity and edge-pancyclicity of crossed cubes [J]. Information Processing letters, 2005, 93(3): 133-138.
- [7] Dong Q, Yan X. Embedding a long fault-free cycle in a crossed cube with more faulty nodes [J]. Information Processing letters, 2010, 110(11): 464-468.
- [8] Li L, Guo D. Cycle embedding in crossed cubes with condi-

- tional edge faults[EB/OL]. (2012-03-23). http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?tp=&arnumber=6221716&contentType=Conference+Publications&searchField%3DSearch_All%26queryText%3DEmbedding+in+crossed+cubes+with+conditional+edge+faults.
- [9] 李林,郭大昌,殷超杰. 一类交叉立方体的自同构[J]. 广东工业大学学报,2011,28(4):45-47.
Li Lin, Guo Da-chang, Yin Chao-jie. A kind of automorphism of the crossed cube[J]. Journal of Guangdong University of Technology,2011,28(4):45-47.
- [10] Wang D. On embedding Hamiltonian cycles in crossed cubes[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems 2008,19(3):334-346.
- [11] Chen Hon-chan, Kung Tzu-liang, Hsu Lih-hsing. Embedding a Hamiltonian cycle in the crossed cube with two required vertices in the fixed positions[J]. Applied Mathematics and Computation,2011,217(24):10058-10065.
- [12] Cull P, Larson S M. The Möbius cubes[J]. IEEE Transactions on Computers,1995,44(5):647-659.
- [13] Xu J M, Ma M, Lu M. Paths in Möbius cubes and crossed cubes[J]. Information Processing Letters 2006,97(3):94-97.
- [14] Hsu Hong-chun, Lai Pao-lien, Tsai Chang-hsiung. Geodesic pancyclicity and balanced pancyclicity of Augmented cubes[J]. Information Processing Letters,2007,101(6):227-232.
- [15] Yang X F, Megson G M, Evans D J. Locally twisted cubes are 4-Pancyclic[J]. Applied Mathematics Letters,2004,17(8):919-925.
-
- (上接第74页)
- Tan Run-hua, Wang Qing-yu, Yuan Cai-yun, et al. Theory for solving the inventive problems (TRIZ)-The process, tools and developing trends of TRIZ[J]. Journal of Machine Design,2001,18(7):7-11.
- [3] Suh N P. The principles of design[M]. New York: Oxford University Press,1990.
- [4] Mitsuo Nagamachi. Kansei Engineering: A new ergonomic consumer-oriented technology for product development[J]. International Journal of Industrial Ergonomics, 1995, 15(1): 3-11.
- [5] 高长青,黄克正,张勇. TRIZ 理论在产品创新设计中的应用[J]. 机械科学与技术,2006,25(4):501-504.
Gao Chang-qing, Huang Ke-zheng, Zhang Yong. Application of TRIZ to innovation product design[J]. Mechanical Science and Technology,2006,25(4):501-504.
- [6] 谢庆生,韩涛,李亚青,等. 基于 QFD 和 TRIZ 的产品创新设计理论模型及应用[J]. 兰州理工大学学报,2010,36(2):29-32.
Xie Qing-sheng, Han Tao, Li Ya-qing, et al. TRIZ and QFD based product innovation design model and its application[J]. Journal of Lanzhou University of Technology, 2010, 36(2):29-32.
- [7] 杜鹤民,张淑梅. 基于知识耦合的平面设计信息被编码研究[J]. 包装工程,2012,33(16):32-35.
Du He-min, Zhang Shu-mei. The study of graphic design encoding based on knowledge coupling[J]. Packing Engineering, 2012,33(16):32-35.
- [8] 丁玉兰. 人机工程学[M]. 4版. 北京:北京理工大学出版社,2011.
- [9] 卢兆麟,汤文成. 工业设计中的人机工程学理论、技术与应用研究进展[J]. 工程图学学报,2009(6):1-9.
- Lu Zhao-lin, Tang Wen-cheng. Review on theory technology and application research of ergonomics in industrial design[J]. Journal of Engineering Graphics, 2009(6):1-9.
- [10] 杜鹤民,余隋怀,初建杰,等. 一种航空智能计算机辅助训练系统的构建方法[J]. 计算机集成制造系统,2011,11(1):69-76.
Du He-min, Yu Sui-huai, Chu Jian-jie, et al. Construction method for aviation intelligent computer based training system[J]. Computer Integrated Manufacturing System, 2011,11(1):69-76.
- [11] 史忠植. 认知科学[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2008.
- [12] 徐伟,刘朝明. 基于设计心理学的产品设计研究[J]. 机械研究与应用,2008,21(5):6-9.
Xu Wei, Liu Zhao-ming. Research of product design based on design psychology[J]. Mechanical Research & Application,2008,21(5):6-9.
- [13] 王二强,余隋怀,杜鹤民. QFD 和信息熵在油罐车改良设计中的应用研究[J]. 机械设计与制造,2011(8):60-62.
Wang Er-qiang, Yu Sui-huai, Du He-min. Application of QFD and information entropy in improved design for the tank truck[J]. Machinery Design & Manufacture, 2011(8):60-62.
- [14] 苏建宁,江平宇,朱斌,等. 感性工学及其在产品中的应用研究[J]. 西安交通大学学报:自然科学版,2004,38(1):60-63.
Sun Jian-ning, Jiang Ping-yu, Zhu Bin, et al. Research on Kansei engineering and its application to product design[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University: Natural Science Edition, 2004,38(1):60-63.